プラズマにおける非線形現象

京大理　西川恭治

§1. Introduction

プラズマにおける物理現象を，多体効果を無視して理解することはできない。プラズマはまた，ほとんど常に熱平衡からはずれた状態にある。熱平衡からのはずれはしばしば波の励起という形で現われ，それに伴う非線形現象が極く自然に観測される。このような非線形現象は，様々な実験条件の下で無数の variety をもって現われるので，それをまとめることはとうてい私のできることではない。以下の報告では，主として私自身が身辺に接触している研究から話題を拾ってみた。

§2. 波の励起

プラズマ中に波を立たせる方法は，大別して

a) 外からの disturbance で強制振動を起させる方法と

b) 不安定性を利用する方法

とがある。前者の例としては，導波管の途中にプラズマを挿入してマイクロ波で強制振動を起す場合とか，プラズマ中にグリッドやアンテナを挿入してそれに交流電圧を加える方法などがある。また，後者の例としては，プラズマ中に高速電子ビームを走らせる方法とか，境界での密度の不均一を利用する方法などがある。このような方法で実際にどういう波動が励起されるかについては，具体例の中で必要なだけ説明することにする。

§3. 非線形現象の分類

簡単のため，外場のない，非相対論的プラズマに対するヴラソフ方程式にもとづいて考察しよう。電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ の下で分布関数 $f^{\alpha}(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ のみたすヴラソフ方程式は

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right\} f^{\alpha}(\mathbf{v},\mathbf{r},t)=0 \quad (\alpha=e,i) \qquad (1)$$

と書かれる。ここで $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ はポアッソンの方程式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{t}), \tag{2}$$

$$\triangle\varphi(\mathbf{r},t) = -\sum_{\alpha} 4\pi e_{\alpha}\int d\mathbf{v}\, f^{\alpha}(\mathbf{v},\mathbf{r},\mathbf{t}) \tag{3}$$

をみたすようにきめる。これらの方程式を適当な境界条件の下でフーリエ変換すると

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\right\} f^{\alpha}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{t}) + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f^{\alpha}_{0}(\mathbf{v},\mathbf{t})$$

$$+\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}}\sum_{\mathbf{k}'\neq\mathbf{k}}\mathbf{E}_{\mathbf{k}'}(t)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f^{\alpha}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\mathbf{v},t) = 0 \tag{4}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = \frac{4\pi\mathbf{k}}{ik^{2}}\sum_{\alpha} e_{\alpha}\int d\mathbf{v}\, f^{\alpha}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v},t) \tag{5}$$

と書かれる。

まず線形近似というのは，$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{t})$ $(\mathbf{k}\neq 0)$ に関して線形化する近似をさしていう。この近似の下では

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{\alpha}_{0}(\mathbf{v},\mathbf{t}) = 0 \quad \text{or} \quad f^{\alpha}_{0}(\mathbf{v},\mathbf{t}) = f^{\alpha}_{0}(\mathbf{v}) = \text{Const.} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\right) f^{\alpha}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{t}) + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f^{\alpha}_{0}(\mathbf{v}) = 0 \tag{7}$$

と書かれる。これは初期値問題として直ちにとかれる。

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{4\pi\mathbf{k}}{ik^{2}}\sum_{\alpha}\frac{e_{\alpha}^{2}}{m_{\alpha}}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega t}}{\varepsilon(\mathbf{k},\omega)}\int d\mathbf{v}\frac{1}{-i\omega+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v},\mathbf{t}=0) \tag{8}$$

ここに $\varepsilon(\mathbf{k},\omega)$ は誘電関数で

$$\varepsilon(\mathbf{k},\omega) = 1+\frac{4\pi}{ik^{2}}\sum_{\alpha}\frac{e_{\alpha}^{2}}{m_{\alpha}}\int d\mathbf{v}\frac{1}{-i\omega+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}\,\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f^{\alpha}_{0}(\mathbf{v}) \tag{9}$$

で与えられる。よく知られているように

$$\varepsilon(\mathbf{k},\omega) = 0 \tag{10}$$

が線形近似での波の分散関係を与える。その解を

$$\omega = \omega_k + i\gamma_k \tag{11}$$

と書くと，ω_k が振動数，$-\gamma_k$ がランダウ減衰率を与える。

次に非線形効果を考慮に入れると（6）は

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0^\alpha(v,t) = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\sum_k E_k(t)\cdot\frac{\partial}{\partial v} f_{-k}^\alpha(v,t) \tag{12}$$

と書きかえられ，（7）は（4）になる。これからすぐ分るように，非線形効果には次の二種類がある。

i）$f_0^\alpha(v,t)$ の時間依存性（nonadiabatic effect）

ii）$k' \neq k$ なるフーリエ成分の効果（mode-mode coupling effect）

後者は通常 iteration で取り扱うが，その際，再び k 成分にもどって来る部分とそうでない部分とがある。前者は $f_0^\alpha(v,t) = \mathrm{Const.}$ という近似の下では，誘電関数 $\varepsilon(k,\omega)$ にくりこむことができる。一方後者は nonlinear source として働く，こうして

ii a）Nonlinear dielectric function への寄与

ii b）Nonlinear source term への寄与

という分類が可能になる。この a）と b）とは物理的にも全く異る効果をひき起すと考えられる。すなわち前者は分散関係（10）あるいは（11）への補正を与えるのに対して，後者は linear theory ででて来るいろいろな振動の結合振動数での forced oscillation をひき起す。

以下この三種の非線形効果をいくつかの具体例で示す。

i－イ）Quasi－linear effect

i－ロ）Nonlinear trappong と振幅振動

ii a－イ）Parametric or decay instability

ii a－ロ）Conversion of waves by scattering

ii b－イ）Harmonic generation

ii b－ロ）Plasma wave echo

§4. Quasi－linear effect

ビームによって縦波が励起した時，その不安定成長を抑える非線形効果と

して，1960年 Drummond－Pines 及び Vedenov－Velikhov－Sagdeev によって考え出された。不安定性は，波の位相速度附近でビームにより粒子の population inversion（$\mathbf{v}\cdot\dfrac{\partial f_0^{\alpha}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}>0$）が起っている時に起る。すなわちこの時 $\gamma_{\mathbf{k}}>0$ となる。しかし波の成長につれて，そのはねかえりが $f_0^{\alpha}(\mathbf{v},t)$ に現われる。これは，波の位相速度附近で速度空間での拡散が増大するという形で起る。すると population inversion がならされ，$\gamma_{\mathbf{k}}$ が減少して最後に不安定成長が止るというのである。この理論は，$\gamma_{\mathbf{k}}$ の time scale を τ_0 とした時*)

$$\triangle k\,(v_{ph}-v_{gr}) \gg |\gamma_{\mathbf{k}}| \gg \tau_0$$

という条件の下で成り立つ。ここに $\triangle k$ は励起する波の波数幅，v_{ph}，v_{gr} は位相速度及び群速度である。

ところでこの理論は，その後計算機実験などを通していろいろ批判された。その一つの理由は，元来不安定成長をするのは，ノイズを種とするような fluctuation であって，それは Vlasov 方程式で表わされるような coherent な fluctuation ではなく，二体相関関数で表わされるような incoherent な fluctuation だという点にある。こういう fluctuation の生成は一般に induced process と spontaneons process とから成り，$\gamma_k>0$ での成長にきくのは，この中の induced process の部分である。しかしビームがあると spontaheons process の寄与も著しく大きくなり，弱い不安定性（γ_k が小さい）の時にはむしろ spontaneons process の方がほとんどの励起領域で支配的となることが数値計算で明らかとなった。

§5. Nonlinear Trapping and Amplitude Oscillation

無衝突プラズマ中に大振幅の定常的な単色波動が存在すると，その波の位相速度ぐらいで運動している粒子は，そのポテンシャルの谷間に捕えられて振動を行う。この振動は位相速度附近の速度分布，従って γ_k の振動をひき

＊　例えば $\tau_0=|\gamma_{\mathbf{k}}/d\gamma_{\mathbf{k}}/dt|$ と考えればよい。

起し，それは波の振幅の振動として観測される。この振幅振動の現象は実験的にも電子プラズマ波動及びイオン音波についてきれいに観測されている。これについてのくわしい話は物性研究 10 No1 14（1968）を見ていただきたい。

§6. Parametric or Decay Instability

いわゆる three wave process として知られる波の間の相互作用による不安定性がこれである。例えば，電子プラズマ振動数附近の大振幅の電磁波を照射すると，それが電子プラズマ波動とイオン音波とに転換する。この現象は本質的に誘導ラマン散乱とが誘導ブリラン散乱と同種の現象であり，三つの波の組み合わせとして，いろいろな波を考えることによって variety にとんだ現象が現われる。この現象の特徴は，不安定励起を生ずるのに明瞭な threshold が存在することであり，特にそのしきい値の低いことが現象を観測し易くしている。また，損失を無視すると，入力と出力との間に一定のパワー関係が存在する。これは Manley－Rowe 関係と呼ばれ，入力の振動数及びパワーを ω_0、P_0，出力のそれを ω_1，P_1 及び ω_2，P_2 とすると

$$\frac{P_0}{\omega_0} = -\frac{P_1}{\omega_1} = -\frac{P_2}{\omega_2}$$

という関係が成り立つ。従ってもし $\omega_0 \approx \omega_1 \gg \omega_2$ である場合には，入力パワーはほとんど ω_1 へ行き，ω_2 へはほとんど行かない。これについての具体的な話は，日本物理学会誌「最近の研究から」に近く発表される予定の天野・岡本両氏のまとめを見ていただきたい。

§7. Conversion of Waves by Scattering

二つの波の相互作用が粒子の熱運動を媒介として起る現象である。この場合は相互作用を媒介する特定の粒子群（共鳴粒子）が存在し，それは

$$\omega_1 - k_1 \cdot v = \omega_2 - k_2 \cdot v$$

という式をみたす速度 $\mathbf{v}$ の粒子群である。ここに $\omega_1\,\mathbf{k}_1$ 及び $\omega_2\,\mathbf{k}_2$ が考えている二つの波の振動数及び波数ベクトルである。この現象で特に興味深い

のは，電子プラズマ振動のような高周波の波動とイオン音波のような低周波の波動との間の energy conversion が行われる場合である。すなわち

$$\int \delta(\omega_1-\omega_2-(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2).\mathbf{x}\,]\,(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,f_0^{\alpha}(\mathbf{v})$$

の正負によって，エネルギーは ω_1 から ω_2 へ，または ω_2 から ω_1 へ夫々移行する。これに対応すると思われる実験が我が国で最近二つ観測されている。一つはビームで比較的単波長の電子プラズマ波を作った時，同時に長波長のイオン波が観測されたという現象である。ここでビームをイオン波ぐらいの振動数で変調すると，イオン波のみならず，電子プラズマ波の方の振幅も変って来る。第二は，早いイオンビームでイオンプラズマ波ができる状態で，長波長の電子プラズマ波を励振してやる。そこへ外からイオンプラズマ波と同じ振動数の交流を加えると，電子プラズマ波の方も励起される。このように，低周波を励起することによって高周波も同時に励記できるメカニズムは，three wave process では考えられないことで，scattering がきいているのではないかと思われる。ただしこの場合でも，パワーの間には

$$\frac{p_1}{\omega_1} = -\frac{p_2}{\omega_2}$$

という Manley－Rowe 関係が存在する。

§8. Harmonic Generation

非線形現象の中でこれくらい当り前の現象はないのだが，そのきれいな測定は私の知る限りでは意外に少いように思う。我が国では最近田中氏らにより，Bernstein mode と呼ばれる磁場と垂直に伝わる高周波の継波について，美しい実験が行われている。この現象のポイントは，振動数が正確に fundamental の整数倍になることと，その強度が，n 次の場合 fundamental の n 乗に比例することである。

これと似た現象に，プラズマ中に二つの振動がある場合のその混成振動数の波の生成がある。しかし，プラズマ中ではこの混成波の生成も決して単純

ではない。例えばある種の混成波は観測されるが，別の混成波は観測されなかったり，混成波の生成過程におくれや，ある種の段階的生成が起ったりするのである。この辺りの現象はまだ充分整理つくされているわけではなく，目下理論と実験を対応させる努力を積んでいる段階である。

§9. Plasma Wave Echo

プラズマにおける非線形現象の中で最も美しく理論と対応する現象である。これは無衝突プラズマ中に距離 ℓ だけ離して振動数 ω_1 及び ω_2 の波を励起してやると，高い方の周波数（ω_2 とする）の波から，距離 $\omega_1 \ell/(\omega_2-\omega_1)$ だけ離れたところに振動数（$\omega_2-\omega_1$）の波が現われるという現象である。これは波がランダウ減衰した後でも粒子はその波の記憶を止めているために起る現象で，くわしい訳は物性研究 10 No1 14 （1968）をみていただきたい。

§10 Turbulence Spectrum

最後に，highly turbulent plasma における波の frequency spectrum について一言ふれておこう。田中氏らの実験によると，非線形効果で励起された Bernstein mode の高調波の強度 $I(\omega)$ は，充分高いレベルまで励起された状態では，ほぼ

$$I(\omega) \propto \omega^{-5}$$

という関係をみたしている。これは，簡単な次元解析から予想されるものと一致している。